Određeni integral

1. Integralne sume, određeni integral. geometrijski i fizički smisao

Neka je $f(x)$ zadata na intervalu $[a,b]$. Niz tačaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takvih da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ nazivamo podjelom intervala $[a,b]$. Označimo sa P podjelu intervala $[a,b]$.

Označimo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$, i neka je $\Delta = \max\{\Delta x_i\}$ - dužina maksimalnog intervala podjele. Δ nazivamo dijametrom podjele.

Definicija Neka je ξ_i proizvoljno izabrana tačka sa intervala $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,2,\ldots,n$ podjele P intervala $[a,b]$. Sumu

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

nazivamo Rimanovom integralnom sumom funkcije $f(x)$ koja odgovara podjeli P intervala $[a,b]$ i izboru tačaka ξ_i.

Razmotrimo sada graničnu vrijednost integralnih suma (1) kada dijametar podjele teži nuli tj

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$$

Definicija
Ako ~~ova~~ granična vrijednost (2) postoji nezavisno od podjele intervala $[a,b]$ i izbora tačaka ξ_i to kažemo da je funkcija $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu na $[a,b]$, a ~~Definicija~~ samu graničnu vrijednost nazivamo određenim integralom fje $f(x)$ na $[a,b]$ i označavamo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{tj}$$

tj

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (3)$$

~~Definicija~~

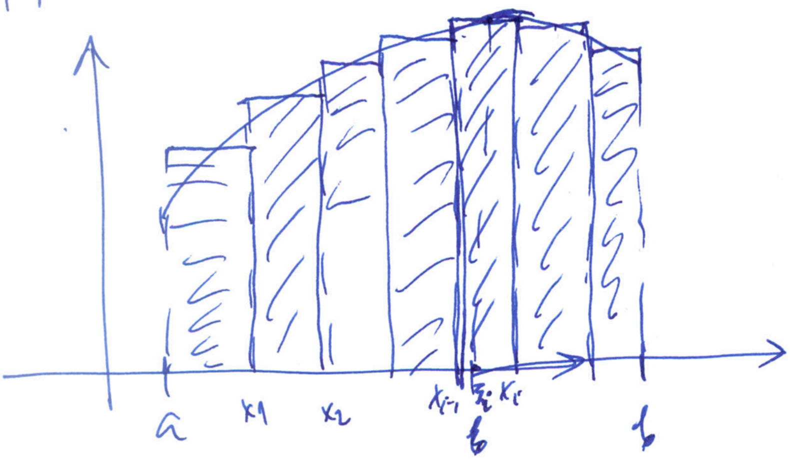
Znači, određeni integral fje $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ ~~je~~ neki broj I.

Primijetimo takođe da je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ tj svejedno je po kojoj promjenljivoj x ili t integralimo na intervalu $[a,b]$.

Razjasnimo ~~fizički smisao~~ geometrijski i fizički smisao Rimanovih integralnih suma.

Geometrijski smisao

Neka je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Nazovimo krivolinijskim trapezom figuru ograničenu grafikom funkcije $f(x)$, pravima $x=a$, $x=b$ i x-osom. Tada je $f(\xi_i)\Delta x_i$ jednako površini pravougaonika s osnovom $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i visinom $f(\xi_i)$, a suma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ je suma površina tih pravougaonika koja odgovara podjeli P sa visinama $f(\xi_i)$.



Kada $\Delta \to 0$ podjele P, ako postoji granična vrijednost to je prirodno veličinu I nazvati površinom krivolinijskog trapeza. Znači, Određeni integral od nenegativne funkcije predstavlja površinu odgovarajućeg krivolinijskog ~~intervala~~ trapeza.

Fizički smisao: Neka se tačka kreće pravolinijski duž neke ose sa brzinom $v(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, mijenjajući se neprekidno. Pređeni put tačke za mali period vremena $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ možemo približno smatrati veličinu $v(\tau_i)\Delta t_i$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Tada integralna suma $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$ predstavlja približan put koji tačka pređe od momenta t_0 do momenta vremena T. Kad pustimo da $\Delta = \max|\Delta t_i| \to 0$ dobijamo tačnu vrijednost tog pređenog puta S, tj.

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt$$

Svojstva integralnih suma

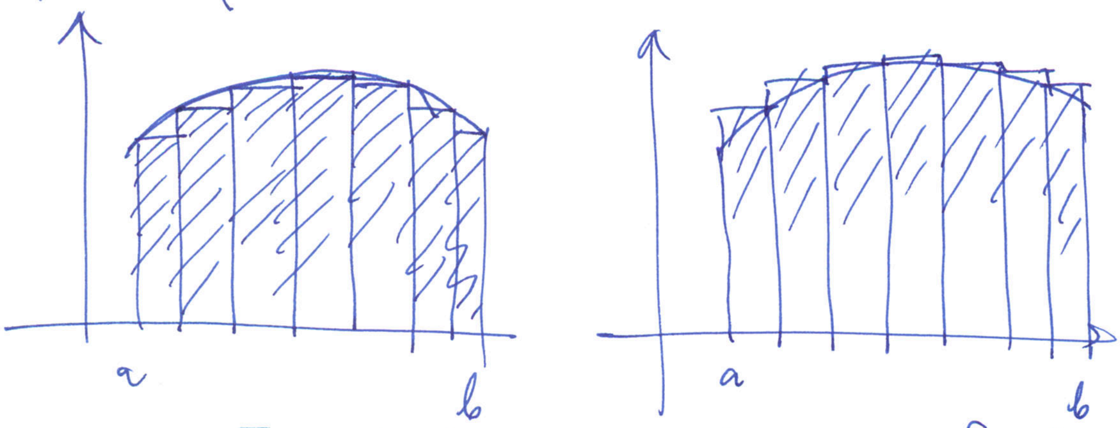
Definicija: Neka je data podjela P intervala $[a,b]$ i neka je $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Tada sume $\overline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ i $\underline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ nazivamo gornjom ~~od~~ i donjom integralnom sumom za podjelu P.

Pošto je $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i $\Delta x_i > 0$
to očigledno važi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ tj.}$$

važi $\underline{\sigma_n} \leq \sigma_n \leq \overline{\sigma_n}$, gdje je $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ Rimanova suma koja odgovara datoj podjeli.

Geometrijski donja i gornja suma predstavljaju površine stepenastih ~~pravougaonika~~ figura (sastavljene iz pravougaonika).



Vidimo da $\overline{\sigma_n}$ sadrži krivolinijski trapez, a $\underline{\sigma_n}$ je sadržana u krivolinijskom trapezu. Očigledno da ako je površina $\overline{\sigma_n} - \underline{\sigma_n}$ jako mala to su sume $\overline{\sigma_n}$ i $\underline{\sigma_n}$ veoma bliske krivolinijskom trapezu.

Teorema gornja (donja) integralna suma je jednaka supremumu (infimumu) Rimanove integralne sume koja odgovara istom razbijanju intervala $[a,b]$ tj.

$$\overline{\sigma_n} = \sup_{\xi_i} \sigma_n = \sup_{\xi_i} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\underline{\sigma_n} = \inf_{\xi_i} \sigma_n = \inf_{\xi_i} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Uslovi integrabilnosti funkcija

Teorema 1 ~~Da bi~~ F-ja $f(x)$ je integrabilna (u Rimanovom smislu) na $[a,b]$ ako ~~i samo ako je~~ je ograničena na tom intervalu.

Teorema 2 Ograničena f-ja je integrabilna na intervalu $[a,b]$ ako i samo ako je

$$I = \lim_{\Delta\to 0} \overline{\sigma}_n = \lim_{\Delta \to 0} \underline{\sigma}_n ,$$

pritome $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dokaz. (⇒)) ~~Neka je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$ tj. neka postoji $I = \lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma_n$ za proizvoljnu podjelu intervala $[a,b]$. Pošto je~~

~~$\underline{\sigma}_n \le \sigma_n \le \overline{\sigma}_n$~~

Teorema 3 Svaka neprekidna f-ja na $[a,b]$ je integrabilna na $[a,b]$

Teorema 4 Monotona na $[a,b]$ f-ja je integrabilna na tom intervalu.

Teorema 5 Ograničena funkcija koja ima konačno mnogo prekida prve vrste na $[a,b]$ je integrabilna na $[a,b]$.

Primjer Izračunati $\int_0^b x^3\,dx = I$

$f(x)=x^3$ je integrabilna na $[0,b]$ jer je neprekidna na tom intervalu znači integral I postoji. Uvedimo podjelu intervala $[0,b]$ na n - jednakih dijelova

$$x_0=0,\ x_1 = 1\cdot\Delta x,\ x_2 = 2\Delta x, \ldots,\ x_n = b = n\Delta x$$

gdje je $\Delta x = \frac{b}{n} = \Delta x_i$

Za tačke ξ_i uzmimo krajnje lijeve tačke intervala $[x_{i-1}, x_i] =$
$= [(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ $i=1,2,\ldots,n$ tj $\xi_i = (i-1)\Delta x$. Tada je

$$f(\xi_i) = \xi_i^3 = (i-1)^3 \Delta x^3 = \frac{b^3}{n^3}(i-1)^3 .$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3}(i-1)^3\cdot\frac{b}{n} = \frac{b^4}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^n (i-1)^3 =$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\left[1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right] = \frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{(n-1)^2\cdot n^2}{4},$$

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4 (n-1)^2 n^2}{4 n^4} = \frac{b^4}{4}$$

Svojstva određenog integrala

1° Smatramo da je $\int_a^a f(x)dx = 0$

2°. $\int_a^b dx = b-a$ **Dokaz** $\int_a^b dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = \underline{b-a}$

3° Za svako α i $\beta \in R$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Dokaz $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i =$

$= \alpha \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

4° Ako je $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, $a<b$ to je tada

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Dokaz $f(\xi_i)\geq 0$ $\forall \xi_i \in [a,b]$ i $\Delta x_i > 0 \Rightarrow \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$

$\Rightarrow I \geq 0.$

5° Ako je $f(x) \geq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$ to je

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx, \quad \underline{a<b}$$

6° $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

7° Neka je $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ tada je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dokaz $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$

8° $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

9° za svako a, b, c važi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Veza između određenog i neodređenog integrala

Teorema o srednjoj vrijednosti integrala

Teorema Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ f-ja, tada postoji tačka $\xi \in [a,b]$ takva da

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

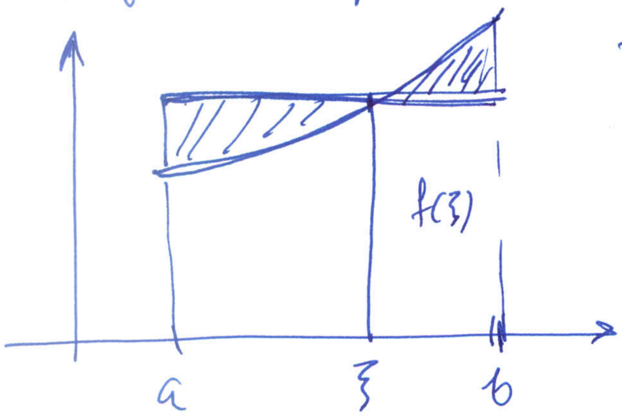
Dokaz: Iz relacije

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

slijedi da je

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

gdje je $m = \inf_{[a,b]} f(x)$; $M = \sup f(x)$. Odavde je jasno da je broj $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ vrijednost sa intervala $[m, M]$. Pošto je $f(x)$ neprekidna f-ja slijedi da postoji $\xi \in [a,b]$ tako da je $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ Δ



Teorema o srednjoj vrijednosti tvrdi da postoji pravougaonik sa stranama $b-a$ i $f(\xi)$ čija je površina jednaka površini krivolinijskog trapeza.

Primjer Naći srednju vrijednost f-je $f(x) = x^3$ na intervalu $[0, b]$

Rješenje Pošto je $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$ to je tada

$$f(\xi) = \frac{1}{b} \cdot \int_0^b x^3 dx = \frac{b^3}{4} \quad \Delta$$

Njutn-Lajbnicova formula

Izvod integrala po granici

Razmatraćemo integral

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

gde je f integrabilna f-ja na $[a,b]$ koja je za svako $x \in [a,b]$ integrabilna na intervalu $[a,x]$

Teorema Neka je $f(x)$ neprekidna f-ja na $[a,b]$ i neka je $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Tada, ~~važi~~ ~~da~~ je $\Phi(x)$ diferencijabilna f-ja na $[a,b]$ i važi da je

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Dokaz.

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \left(= \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)\frac{1}{\Delta x} = \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)\frac{1}{\Delta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(x) + f(t) - f(x)]\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)]\,dt =$$

$$= f(x) + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)]\,dt$$

Zbog neprekidnosti f-je $f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, pošto je $|t - x| < \delta$, pa za $|\Delta x| < \delta$

$\Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$, pa je

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)]\,dt\right| \leq \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x) = \Phi'(x)$$

[ili $\quad \cancel{\frac{1}{\Delta x}}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\,\Delta x \qquad \xi \in [x, x+\Delta x]$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(x), \quad \xi \in [x, x+\Delta x]$$

Znači, f-ja $\Phi(x)$ je primitivna f-ja f-je $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Primjer

$$\left(\int^{x} \ln \cos t\, dt\right)'_x = \ln \cos x \,, \quad 0 \leq x < \pi/2$$

Njutn-Lajbnicova formula

Teorema (Njutn-Lajbnicova formula)

Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i $F(x)$ - primitivna f-ja f-je $f(x)$ na tom intervalu, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

(tj. određeni integral je jednak priraštaju primitivne f-je na $[a,b]$)

Dokaz Neka je $F(x)$ primitivna f-ja f-je $f(x)$ na $[a,b]$. Po prethodnoj teoremi f-ja $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ je takođe primitivna f-ja f-je $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Poznato je da se sve primitivne f-je neke f-je razlikuju za konstantu tj.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \,, \quad \forall x \in [a,b]$$

Kada stavimo $x=a$ imamo da je

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

Pošto je $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a,b]$

za $x=b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ $\triangle$

Primjer

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 .$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

Metode integracije određenog integrala

Metod zamjene ~~prom~~

Teorema Neka je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$, a $x=\varphi(t)$ – neprekidno diferencijabilna f-ja na intervalu $[\alpha,\beta]$, takva da je $\varphi[\alpha,\beta]=[a,b]$ i $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Tada važi formula zamjene promjenljivih kod određenog integrala:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$$

Dokaz $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F[\varphi(\beta)]-F(\varphi(\alpha)) =$

$$=\int_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Znači, praktično

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,\quad x=\varphi(t).$$

Primjer $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Smjena $\sqrt{x}=t$, $x=t^2\ (t>0)$ $x=0$, $t=0$, $\underline{x=4,\ t=2}$ / $dx=2tdt$

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_0^2=$$

$$=4-2\ln 3$$

Integrali od periodičnih, parnih i neparnih f-ja

Teorema Neka je $f(x)$ integrabilna f-ja na intervalu $[-a,a]$. Tada ako je f parna f-ja to je tada ($f(x)=f(-x)$)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ako je f neparna f-ja, tada je ($f(x)=-f(-x)$)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Ako je f periodična f-ja s periodom T, integrabilna na svakom konačnom intervalu, tada za svako $a\in\mathbb{R}$ je

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

Metod parcijalne integracije

Teorema Neka su $u=u(x)$ i $v=v(x)$ neprekidno diferencijabilne f-je na intervalu $[a,b]$. Tada važi formula parcijalne integracije za određene integrale:

$$\int_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,du(x).$$

Dokaz Na osnovu formule $d(uv)=u\,dv+v\,du$ i Njutn-Lajbnicove formule slijedi dokaz teoreme.

Primjer
$$\int_{1}^{e} x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=x\,dx, & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{e} - \frac{1}{2}\int_{1}^{e} x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_{1}^{e} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$